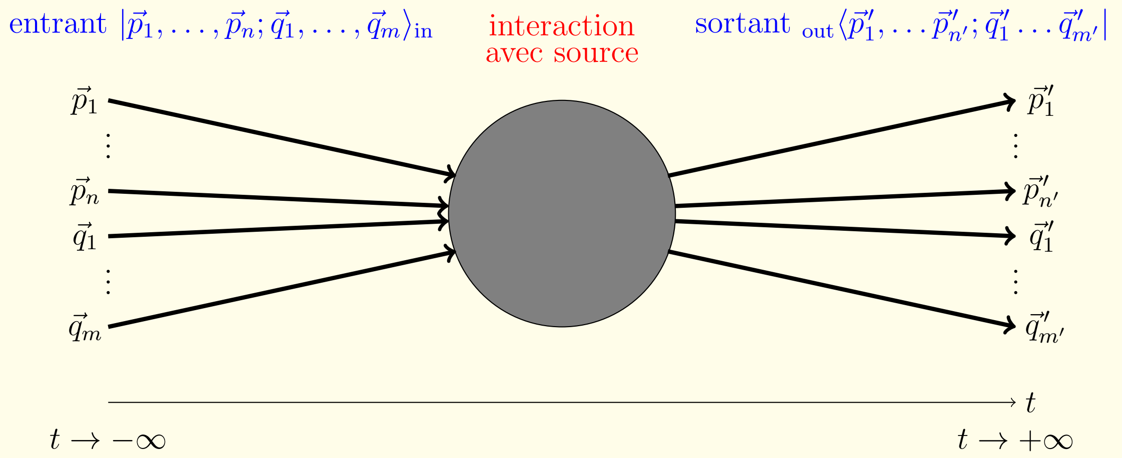
TD Quantification des Champs Libres — N° 9 —

Répétition des concepts du cours

On considère un champ scalaire complexe couplé à une source $j(x)$ (avec $j(x) \neq 0$ seulement pour $x^0 \in [-T, T]$). En utilisant le schéma ci-dessous, expliquez le concept de l'opérateur de la matrice S pour décrire les transitions dans des expériences simples de diffusion.



I. Émission Stimulée

On considère dans l'espace de Minkowski à quatre dimension $\mathbb{R}^{1,3}$ un champ scalaire complexe $\phi(x)$ de masse m (avec $m \in \mathbb{R}_+$) qui interagit avec une source classique complexe $j(x)$ avec transformée de Fourier $\tilde{j}$

$$j(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \tilde{j}(k)\, e^{-ikx} .$$

On rappelle que les champs asymptotiques entrant $\phi_{\text{in}}(x)$ et sortant $\phi_{\text{out}}(x)$ sont des champs scalaires libres de masse m. Les champs asymptotiques sont reliés par

$$\phi_{\text{out}}(x) = \phi_{\text{in}}(x) + \int d^4y\, \Delta(x,y)\, j(y)\, \mathbb{1} ,$$

avec

$$\Delta(x,y) = i \int \widetilde{d^3k}\, \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right)\Big|_{k^0=\omega_{\vec{k}}} , \qquad \text{ou} \quad \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^{\,2} + m^2} .$$

I.A Montrer que les opérateurs de création et d'annihilation entrants et sortants sont reliés par

$$\begin{aligned} a_{\text{out}}(\vec{k}) &= a_{\text{in}}(\vec{k}) + i\,\tilde{j}(k)\,\mathbb{1} , & a^\dagger_{\text{out}}(\vec{k}) &= a^\dagger_{\text{in}}(\vec{k}) - i\,\tilde{j}^*(k)\,\mathbb{1} , \\ b_{\text{out}}(\vec{k}) &= b_{\text{in}}(\vec{k}) + i\,\tilde{j}^*(-k)\,\mathbb{1} , & b^\dagger_{\text{out}}(\vec{k}) &= b^\dagger_{\text{in}}(\vec{k}) - i\,\tilde{j}(-k)\,\mathbb{1} . \end{aligned} \tag{1}$$

I.B Soit $F(\vec{k})$ une fonction complexe du trivecteur $\vec{k}$. On considère l'état cohérent

$$|F;\mathrm{in}\rangle = \exp\left(i\int \widetilde{d^3k}\, F(\vec{k})\, a^\dagger_{\mathrm{in}}(\vec{k})\right)|0\rangle_{\mathrm{in}}\,. \tag{2}$$

[B1] Quelle est le carré de la norme de l'état $|F;\mathrm{in}\rangle$?

[B2] Calculer le commutateur

$$\left[a_{\mathrm{in}}(\vec{k}), \exp\left(i\int \widetilde{d^3k}\, F(\vec{k})\, a^\dagger_{\mathrm{in}}(\vec{k})\right)\right]\,.$$

[B3] Quelle est l'action de l'opérateur $a_{\mathrm{in}}(\vec{k})$ sur l'état $|F;\mathrm{in}\rangle$? Quelle est l'action de $a_{\mathrm{out}}(\vec{k})$ sur le même état ?

[B4] Calculer le nombre moyen de particules entrantes et sortantes dans l'état $|F;\mathrm{in}\rangle$

$$N_{\mathrm{in}}(F) = \frac{\langle F;\mathrm{in}|\int \widetilde{d^3k}\, a^\dagger_{\mathrm{in}}(\vec{k})\, a_{\mathrm{in}}(\vec{k})|F;\mathrm{in}\rangle}{\langle F;\mathrm{in}|F;\mathrm{in}\rangle}\,,$$
$$N_{\mathrm{out}}(F) = \frac{\langle F;\mathrm{in}|\int \widetilde{d^3k}\, a^\dagger_{\mathrm{out}}(\vec{k})\, a_{\mathrm{out}}(\vec{k})|F;\mathrm{in}\rangle}{\langle F;\mathrm{in}|F;\mathrm{in}\rangle}\,.$$

[B5] En utilisant (1), montrer que l'on a

$${}_{\mathrm{out}}\langle 0|F;\mathrm{in}\rangle = \exp\left(-\int \widetilde{d^3k}\, F(\vec{k})\, \tilde{\jmath}^*(\vec{k})\big|_{k^0=\omega_{\vec{k}}}\right)\, {}_{\mathrm{out}}\langle 0|0\rangle_{\mathrm{in}}\,.$$

En utilisant le résultat établi en cours pour le produit scalaire ${}_{\mathrm{out}}\langle 0|0\rangle_{\mathrm{in}}$, en déduire l'expression du produit scalaire ${}_{\mathrm{out}}\langle 0|F;\mathrm{in}\rangle$.

[B6] Calculer les probabilités de trouver n particules entrants ou n particules sortants dans l'état $|F,\mathrm{in}\rangle$.

$$p_n^{\mathrm{in}}(F) = \frac{1}{n!}\int \widetilde{d^3p_1}\ldots\int \widetilde{d^3p_n}\,\frac{|\langle \vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n;\mathrm{in}|F;\mathrm{in}\rangle|^2}{\langle F;\mathrm{in}|F;\mathrm{in}\rangle}\,,$$
$$p_n^{\mathrm{out}}(F) = \frac{1}{n!}\int \widetilde{d^3p_1}\ldots\int \widetilde{d^3p_n}\,\frac{|\langle \vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n;\mathrm{out}|F;\mathrm{in}\rangle|^2}{\langle F;\mathrm{in}|F;\mathrm{in}\rangle}\,.$$

I.C On considère désormais l'état entrant à n_i particules défini par

$$|n_i;\mathrm{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_i!}}\left(\int \widetilde{d^3p}\, F(\vec{p})\, a^\dagger_{\mathrm{in}}(\vec{p})\right)^{n_i} |0\rangle_{\mathrm{in}}\,.$$

[C1] Calculer le carré de la norme du vecteur $|n_i;\mathrm{in}\rangle$.

[C2] Calculer le nombre moyen de particules sortantes (c.à.d. la valeur moyenne de l'opérateur $\int \widetilde{d^3k}\, a^\dagger_{\mathrm{out}}(\vec{k})\, a_{\mathrm{out}}(\vec{k})$ dans l'état $|n_i;\mathrm{in}\rangle$)

I.D On suppose maintenant la source classique faible

$$\int \widetilde{d^3p}\, |\tilde{j}(p)|^2\big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}} \ll 1\,, \quad \text{et} \quad \left|\int \widetilde{d^3p}\, F^*(\vec{p})\,\tilde{j}(p)\right|^2 \big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}} \ll \int \widetilde{d^3p}\,|F(\vec{p})|^2\,.$$

On rappelle que la probabilité de trouver m particules sortantes et n antiparticules sortantes dans l'état $|n_i;\mathrm{in}\rangle$ s'écrit

$$p_{m,n}(n_i) = \frac{\langle n_i;\mathrm{in}|\Pi^{\mathrm{out}}_{m,n}|n_i;\mathrm{in}\rangle}{\langle n_i;\mathrm{in}|n_i;\mathrm{in}\rangle} = \frac{\langle n_i;\mathrm{in}|S^{-1}\,\Pi^{\mathrm{in}}_{m,n}\,S|n_i;\mathrm{in}\rangle}{\langle n_i;\mathrm{in}|n_i;\mathrm{in}\rangle}\,,$$

où $\Pi^{\mathrm{in}}_{m,n}$ est le projecteur sur les états à m particules et n antiparticules entrantes. Il n'est pas nécessaire d'utiliser la forme explicite du projecteur $\Pi^{\mathrm{in}}_{m,n}$, il suffit de savoir qu'il laisse invariants les états à m particules et n antiparticules entrants, et donne le vecteur nul sur tout autre état. On rappelle que la matrice S est

$$S = \exp\left[i\int d^4y\left(\phi^\dagger_{\mathrm{in}}(y)\, j(y) + \phi_{\mathrm{in}}(y)\, j^*(y)\right)\right] = e^{i\mathcal{A}^\dagger}\, e^{i\mathcal{A}}\, e^{-\frac{1}{2}[\mathcal{A},\mathcal{A}^\dagger]}\,,$$

avec $\mathcal{A} = \int \widetilde{d^3k}\,\left[a_{\mathrm{in}}(\vec{k})\,\tilde{j}^*(k) + b_{\mathrm{in}}(\vec{k})\,\tilde{j}(-k)\right]\big|_{k^0=\omega_{\vec{k}}}$, qui satisfait

$$[\mathcal{A},\mathcal{A}^\dagger] = \int \widetilde{d^3p}\,\left(|\tilde{j}(p)|^2 + |\tilde{j}(-p)|^2\right)\mathbb{1}\big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,.$$

Par un développement de S en puissances de la source, calculer à l'ordre 2 dans la source

[D1] la probabilité $p_{n_i,0}(n_i)$ que la nombre des particules reste le même.

[D2] la probabilité $p_{n_i+1,0}(n_i)$ d'emission d'une particule par la source.

[D3] la probabilité $p_{n_i-1,0}(n_i)$ d'absorption d'une particule par la source.

[D4] la probabilité $p_{n_i,1}(n_i)$ d'emission d'une antiparticule par la source.