TD Quantification des Champs Libres — N° 8 —

Répétition des concepts du cours

Soit ϕ un champ scalaire libre quantique.

(i) Rappeler la définition du T-produit $T[\phi(x)\,\phi^\dagger(y)]$.

On rappelle l'ordre normal des opérateurs.

(i) Soient (a, b) des opérateurs d'annihilation et $(a^\dagger, b^\dagger)$ des opérateurs de création. Donner l'expression explicite de $:a(\vec{p})\,a^\dagger(\vec{k})\,a(\vec{q}):$

(ii) Rappeler le Hamiltonien normalement ordonné du champ scalaire libre.

I. Fonction de Green de Feynman

Soit ϕ un champ scalaire, réel libre de masse m qui satisfait l'équation de Klein-Gordon $(\Box + m^2)\phi = 0$. Soit $G(x)$ une fonction de Green de l'opérateur de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\,G(x) = -i\delta^{(4)}(x)\,.$$

I.A Soit $\widetilde{G}$ la transformée de Fourier de G,

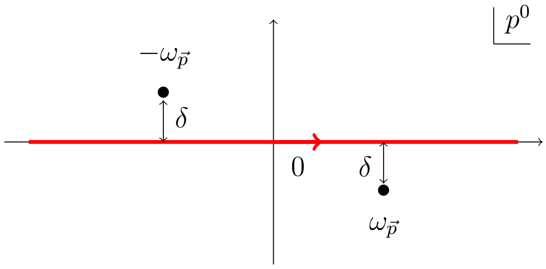
$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ipx}\, \widetilde{G}(p)\,. \tag{1}$$

Montrer que

$$\widetilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}\,.$$

et conclure que $\widetilde{G}(p)$ a des pôles en $p^0 = \pm\omega_{\vec{p}} = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$.

I.B On se propose de calculer l'intégrale sur p^0 en (1) par le théorème des résidus. Pour traiter les pôles, on utilise la prescription de Feynman et déplace les pôles comme suit,



$$-\omega_{\vec{p}} \longrightarrow -\omega_{\vec{p}} + i\delta\,,$$
$$\omega_{\vec{p}} \longrightarrow \omega_{\vec{p}} - i\delta$$

avec δ un paramètre infinitésimal. Montrer que grace à cette prescription, la fonction de Green peut être écrite sous la forme suivante

$$G_F(x) := i \lim_{\epsilon\to 0^+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\,. \tag{2}$$

I.C Calculer l'intégrale sur p^0 dans (2).

I.D La solution générale de l'équation de Klein-Gordon peut être écrite sous la forme suivante

$$\phi(x) = \int \widetilde{d^3k} \left[a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right] \Bigg|_{k^0=\omega_{\vec{k}}}, \qquad \text{avec} \qquad \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^{\,2} + m^2}\,,$$

où les opérateurs de création $a^\dagger(\vec{p})$ et d'annihilation $a(\vec{p})$ satisfont les relations de commutation

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}\,')] = 0 = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}\,')]\,, \qquad \text{et} \qquad [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}\,')] = 2\omega_{\vec{k}}\,(2\pi)^3\,\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}\,')\,.$$

Montrer que G_F peut être écrit sous la forme

$$G_F(x) = \langle 0| T\left(\phi(x)\,\phi(0)\right)|0\rangle\,.$$

II. Opérateur Composite

Dans la théorie quantique du champ scalaire complexe libre de masse m (avec $m \in \mathbb{R}_+$), on étudie l'opérateur

$$\mathcal{O}(x) = \,:\phi(x)\,\phi^\dagger(x):\tag{3}$$

II.A Donner l'expression de cet opérateur en terme d'opérateurs de création et annihilation.

II.B Calculer la fonction de Green

$$\mathcal{G}(x,y) = \langle 0| T\left(\mathcal{O}(x)\,\mathcal{O}(y)\right)|0\rangle\,.$$

II.C On rappelle que la fonction de Green de Feynman peut s'écrire comme

$$G_F(x,y) = \int \widetilde{d^3p}\left[\theta(x^0-y^0)\,e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\,e^{ip(x-y)}\right]\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,.$$

Montrer que l'on a

$$\mathcal{G}(x,y) = G_F(x,y)\,G_F(y,x)\,.\tag{4}$$

II.D En utilisant l'expression de la fonction de Green de Feynman comme transformée de Fourier quadridimensionnelle

$$G_F(x,y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} ,$$

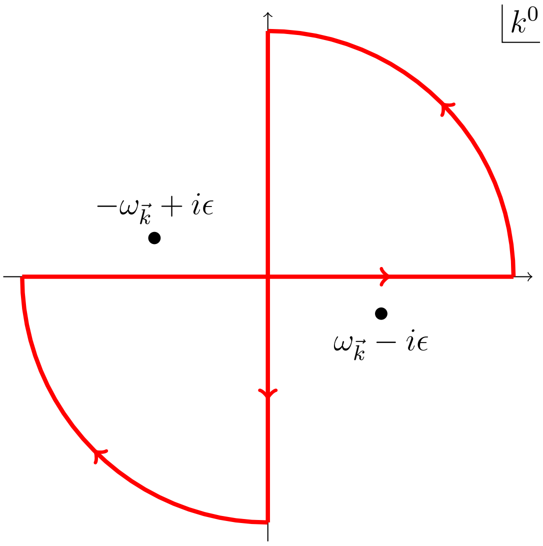
montrer que l'on peut écrire

$$\mathcal{G}(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} F_m(p) ,$$

avec

$$F_m(p) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((p-k)^2 - m^2 + i\epsilon)} .$$

II.E On cherche à évaluer $F_m(p=0)$. On remplace dans l'expression de $F_m(0)$ l'intégrale de k^0 sur l'axe réel par une intégrale dans le plan complexe le long le chemin suivante



On admettra que l'intégrale sur les grands quarts de cercle tend vers 0 lorsque leur rayon tend vers l'infini. En déduire qu'on peut remplacer, dans l'intégrale qui définit $F_m(0)$, la variable k^0 par une variable $i\,k^4$ et donc

$$k^2 = (k^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (k^i)^2 \qquad \longrightarrow \qquad -\,k_E^2 = -\sum_{i=1}^{4} (k^i)^2 , \tag{5}$$

où $k_E = (k^1, k^2, k^3, k^4)$ est un vecteur à quatre composantes euclidien. Montrer alors que

$$F_m(0) = -i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2} . \tag{6}$$

II.F Montrer que l'intégrale (6) est infinie. Il s'agit là d'un exemple de singularité dite ultraviolette. On introduit une deuxième masse M. Montrer que la quantité $F_m(0) - F_M(0)$ est bien définie.

On pourra utiliser la formule

$$d^4k_E\, H(k_E^2) = 2\pi^2 \int_0^\infty k_E^3\, dk_E\, H(k_E^2)\,. \tag{7}$$

La divergence ultra-violette dans l'expression de F_m a pour conséquence que la distribution $\mathcal{G}(x,y)$ n'est pas définie de manière unique. La procédure de "traitement" des divergences ultra-violettes en théorie des champs porte le nom de renormalisation.