

# TD Quantification des Champs Libres

— N° 7 —

## Répétition des concepts du cours

Soit  $\phi$  un champ scalaire quantique, complexe et massif. On rappelle les états

$$|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_m; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1) \dots a^\dagger(\vec{k}_m) b^\dagger(\vec{p}_1) \dots b^\dagger(\vec{p}_n) |0\rangle, \quad \forall \vec{k}_i, \vec{p}_j \in \mathbb{R}^3,$$

où  $a^\dagger(\vec{k})$  et  $b^\dagger(\vec{p})$  sont les opérateurs de création. Calculer

$$\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2; \vec{p}_1, \vec{p}_2; \rangle, \quad \forall \vec{k}_{1,2}, \vec{p}_{1,2} \in \mathbb{R}^3.$$

## I. États Cohérents

On considère des opérateurs de création  $a_k^\dagger$  et d'annihilation  $a_k$  pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  avec les relations de commutation canoniques

$$[a_k, a_{k'}] = 0 = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger], \quad [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \mathbb{1}, \quad \forall k, k' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (1)$$

agissant dans l'espace de Fock bosonique (avec  $\mathbb{1}$  l'opérateur d'identité) engendré par les vecteurs

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (a_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle, \quad \forall n_k \in \mathbb{N}$$

où  $|0\rangle$  est le vecteur vide annihilé par tous les opérateurs d'annihilation  $a_k$ .

**I.A** Montrer que les opérateurs translattés

$$\tilde{a}_k = a_k + \lambda_k \mathbb{1}, \quad \text{et} \quad \tilde{a}_k^\dagger = a_k^\dagger + \lambda_k^* \mathbb{1}, \quad \text{avec} \quad \lambda_k \in \mathbb{C},$$

satisfont les mêmes règles de commutation (1).

**I.B** On introduit l'opérateur

$$\Lambda = \sum_{\ell=1}^{\infty} (\lambda_\ell^* a_\ell - \lambda_\ell a_\ell^\dagger).$$

Montrer que l'on a

$$\tilde{a}_k = a_k + [\Lambda, a_k], \quad \tilde{a}_k^\dagger = a_k^\dagger + [\Lambda, a_k^\dagger].$$

Trouver une transformation unitaire  $U$  telle que pour tout  $k$

$$\tilde{a}_k = U a_k U^{-1}, \quad \tilde{a}_k^\dagger = U a_k^\dagger U^{-1}.$$

**I.C** Montrer que le vecteur  $|\tilde{0}\rangle = U |0\rangle$  est annihilé par tous les opérateurs  $\tilde{a}_k$ . En déduire que l'état  $|\tilde{0}\rangle$  est vecteur propre de chaque opérateur  $a_k$  avec la valeur propre  $-\lambda_k$ .

**I.D** Calculer le produit scalaire  $\langle 0|\tilde{0}\rangle$ . Que devient ce produit scalaire lorsque tous les  $\lambda_k$  valent 1 ?

## II. Fluctuations du Vide

Soit  $\phi(x)$  un opérateur de champ scalaire complexe libre de masse  $m$  (avec  $m \in \mathbb{R}_+$ ) en quatre dimensions d'espace-temps. Soit  $f(x)$  une fonction complexe, et sa transformée de Fourier

$$f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{-ikx}.$$

On définit l'opérateur de champ 'moyen'  $\phi_f(x)$  par

$$\phi_f(x) = \int d^4 y [\phi^\dagger(y) f(y-x) + \phi(y) f^*(y-x)].$$

**II.A** Montrer que l'on a

$$\phi_f(x) = C(x) + C^\dagger(x), \quad \text{avec} \quad C(x) = \int \widetilde{d^3 k} \left[ a^\dagger(\vec{k}) \tilde{f}(-k) + b^\dagger(\vec{k}) \tilde{f}^*(k) \right] e^{ikx} \Big|_{k^0 = \omega_{\vec{k}}},$$

avec  $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ .

**II.B** Vérifier que le commutateur de  $C^\dagger(x)$  et  $C(x)$  s'écrit

$$[C^\dagger(x), C(x)] = K \mathbb{1}, \quad \text{avec} \quad K = \int \widetilde{d^3 k} (|\tilde{f}(k)|^2 + |\tilde{f}(-k)|^2) \Big|_{k^0 = \omega_{\vec{k}}}.$$

**II.C** Le vecteur vide  $|0\rangle$  de l'espace de Hilbert est défini par

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad \text{et} \quad a(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^3.$$

Calculer la distribution de probabilité de l'opérateur  $\phi_f(x)$  dans le vide, qui est défini par

$$\rho_f(s) = \langle 0|\delta(\phi_f(x) - s)|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha s} \langle 0|e^{i\alpha\phi_f(x)}|0\rangle.$$

## III. Renversement du Temps

Soit  $\phi(x)$  un opérateur de champ scalaire complexe libre. Son développement sur les opérateurs d'annihilation et de création s'écrit

$$\phi(x) = \int \widetilde{d^3 p} \left[ a(\vec{k}) e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right] \Big|_{k^0 = \omega_{\vec{k}}}, \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \widetilde{d^3 k} &= \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}, \\ \omega_{\vec{k}} &= \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \end{aligned}$$

À la transformation de renversement du temps est associé un opérateur  $\mathcal{T}$  anti-linéaire, anti-unitaire de l'espace de Hilbert qui agit sur l'opérateur de champ par

$$\mathcal{T} \phi(\vec{x}, t) \mathcal{T}^{-1} = \phi(\vec{x}, -t).$$

Déterminer les opérateurs de création et d'annihilation transformés  $\mathcal{T} a(\vec{k}) \mathcal{T}^{-1}$  et  $\mathcal{T} b(\vec{k}) \mathcal{T}^{-1}$ .

**Indication :** On rappelle que si  $A$  est un opérateur anti-linéaire, et  $\lambda$  un nombre complexe, on a  $A \lambda = \lambda^* A$ .