

TD Quantification des Champs Libres

— N° 6 —

Répétition des concepts du cours

Soit ϕ un champ scalaire, complexe, massif, et Π son conjugué, avec crochet de Poisson

$$\{\phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{y}, t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

De plus, on rappelle que

$$a(\vec{p}) = \int d^3x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} [\omega_{\vec{p}} \phi(\vec{x}, t) + i \Pi^*(\vec{x}, t)] \Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}, \quad \text{avec } \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

- (i) Calculer le crochet de Poisson $\{a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')\}$ pour $\vec{p}, \vec{p}' \in \mathbb{R}^3$.
- (ii) Vérifier qu'une transformation de Lorentz $p \rightarrow k = \Lambda \cdot p$ est une transformation canonique.

I. Champ Scalaire de Masse Nulle

On considère un champ complexe $\phi(x)$ à d dimensions d'espace-temps, dont la dynamique classique est déterminée par l'action

$$S[\phi, \phi^*] = \int d^d x (\partial_\mu \phi^*(x)) (\partial^\mu \phi(x)). \quad (1)$$

I.A Donner les équations du mouvement.

I.B Rappeler l'expression du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$.

I.C Montrer que le tenseur

$$S_{\mu\nu} = \partial^\rho S_{\rho\mu\nu}, \quad \text{avec} \quad S_{\rho\mu\nu} = \eta_{\rho\nu} (\phi^* \partial_\mu \phi + \phi \partial_\mu \phi^*) - \eta_{\mu\nu} (\phi^* \partial_\rho \phi + \phi \partial_\rho \phi^*), \quad (2)$$

est conservé pour toute configuration des champs, c.à.d. satisfait $\partial^\mu S_{\mu\nu} = 0$, même si le champ ϕ n'est pas solution de l'équation de Klein-Gordon à masse nulle. Le tenseur $S_{\mu\nu}$ est appelé un terme d'amélioration. On vérifiera que $S_{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique.

I.D En déduire que toute combinaison linéaire

$$\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \alpha S_{\mu\nu},$$

où α est un paramètre réel, est un tenseur conservé lorsque les équations du mouvement sont satisfaites. La valeur de l'impulsion

$$\hat{P}_\mu = \int d^{d-1}x \hat{T}_{0\mu},$$

est-elle modifiée par le terme d'amélioration ?

I.E Existe-t-il une valeur de α telle que la trace du tenseur énergie-impulsion modifié

$$\hat{T}^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\nu} \hat{T}_{\mu\nu},$$

s'annule lorsque les équations du mouvement sont satisfaites ?

I.F Montrer que l'action (1) est invariante sous les transformations

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu, \quad \text{et} \quad \phi'(x') = \lambda^{\frac{2-d}{2}} \phi(x),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Ces transformations sont appelées dilatations.

I.G Calculer le courant de Noether D^μ associé aux dilatations. Montrer que, lorsque les équations du mouvement sont satisfaites, il peut s'écrire

$$D_\mu = x^\nu \hat{T}_{\mu\nu} + \frac{d-2}{2(d-1)} \partial^\rho (x^\nu S_{\rho\mu\nu}).$$

II. Conjugaison de Charge

On considère un champ scalaire complexe libre de masse m (avec $m \in \mathbb{R}_+$), et les opérateurs de création $a^\dagger(\vec{p})$, $b^\dagger(\vec{p})$ et d'annihilation $a(\vec{p})$, $b(\vec{p})$. On introduit un opérateur linéaire U_λ par

$$U_\lambda = \exp \left(i\lambda \int \widetilde{d^3p} ((a^\dagger(\vec{p}) - b^\dagger(\vec{p}))(a(\vec{p}) - b(\vec{p}))) \right), \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

II.A Montrer que U_λ est un opérateur unitaire. Donner l'action de U_λ sur le vide $|0\rangle$.

II.B On rappelle les commutateurs

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = 2\omega_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \mathbb{1}, \quad \text{et} \quad [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')] = 2\omega_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \mathbb{1}.$$

Montrer que les opérateurs

$$a_\lambda^\dagger(\vec{p}) = U_\lambda a^\dagger(\vec{p}) U_\lambda^{-1}, \quad \text{et} \quad b_\lambda^\dagger(\vec{p}) = U_\lambda b^\dagger(\vec{p}) U_\lambda^{-1},$$

satisfont les équations différentielles

$$\frac{d}{d\lambda} a_\lambda^\dagger(\vec{p}) = i(a_\lambda^\dagger(\vec{p}) - b_\lambda^\dagger(\vec{p})), \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\lambda} b_\lambda^\dagger(\vec{p}) = -i(a_\lambda^\dagger(\vec{p}) - b_\lambda^\dagger(\vec{p})).$$

II.C Intégrer ces équations.

II.D Existe-t-il une valeur de λ telle que l'on puisse identifier U_λ avec l'opérateur de conjugaison de charge U_C qui satisfait

$$U_C a^\dagger(\vec{p}) U_C^{-1} = b^\dagger(\vec{p}), \quad \text{et} \quad U_C b^\dagger(\vec{p}) U_C^{-1} = a^\dagger(\vec{p})?$$

III. Produit Scalaire

On considère l'espace de Fock introduit dans la théorie quantique du champ scalaire libre, notamment les états

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1) \dots a^\dagger(\vec{p}_n) b^\dagger(\vec{q}_1) \dots b^\dagger(\vec{q}_m) |0\rangle, \quad \forall \vec{p}_i, \vec{q}_j \in \mathbb{R}^3.$$

III.A Montrer que

$$\langle \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n; |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m; \rangle = 0, \quad \text{si } m \neq n.$$

III.B Calculer les produits scalaires

$$\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2; |\vec{p}_1, \vec{p}_2; \rangle, \quad \text{et} \quad \langle \vec{k}_1; \vec{p}_1 | \vec{k}_2; \vec{p}_2; \rangle.$$

III.C Sans trop de calculs, proposez une expression pour le produit scalaire général

$$\langle \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_m; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | \vec{k}_1', \dots, \vec{k}_m'; \vec{p}_1', \dots, \vec{p}_n' \rangle.$$

III.D Calculer les relations de commutation des opérateurs de création et d'annihilation avec l'opérateur

$$N = \int \widetilde{d^3k} \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \right).$$

Quelle est l'interprétation de cet opérateur ?

III.E De même, donner l'interprétation de l'opérateur

$$P_{(2;0)} = \int \frac{d^3p_1}{2\omega_{\vec{p}_1}} \int \frac{d^3p_2}{2\omega_{\vec{p}_2}} |\vec{p}_1, \vec{p}_2; \rangle \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2; |.$$