

TD Quantification des Champs Libres

— N° 5 —

Répétition des concepts du cours

On rappelle l'action d'un champ scalaire classique, complexe, massif et libre ϕ (et son conjugué ϕ^*)

$$S[\phi, \phi^*] = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} d^4x \mathcal{L}(\phi, \phi^*; \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*), \quad \text{avec} \quad \mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^*.$$

(i) Vérifier explicitement que

$$\phi(x) = \int \widetilde{d^3k} \left[a(\vec{k}) e^{-ikx} + b^*(\vec{k}) e^{ikx} \right] \Big|_{k^0=\omega_{\vec{k}}}, \quad \text{avec} \quad \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2},$$

est une solution des équations du mouvement pour toutes fonctions

$$a, b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}.$$

(ii) Calculez l'hamiltonien H de la théorie et l'exprimer en termes de a, a^*, b, b^* .

I. Invariance de Lorentz

Soient k et k' des quadrvecteurs qui satisfont

$$k^2 = \eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = m^2 = k'^2, \quad \text{avec} \quad m \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$k^0 = \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0, \quad \text{et} \quad k'^0 = \omega_{\vec{k}'} = \sqrt{\vec{k}'^2 + m^2} > 0.$$

Soit $D(\vec{k}, \vec{k}')$ la distribution

$$D(\vec{k}, \vec{k}') = k^0 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}').$$

Le but de cet exercice est de montrer que $D(\vec{k}, \vec{k}')$ est invariant sous les transformations de Lorentz, c.à.d. pour $\Lambda \in SO^\uparrow(1, 3)$:

$$D(\vec{k}, \vec{k}') = D(\overrightarrow{\Lambda \cdot k}, \overrightarrow{\Lambda \cdot k'}),$$

où $\overrightarrow{\Lambda \cdot k}$ est la partie spatiale du quadrvecteur $\Lambda \cdot k$.

On admettra qu'un changement de variable inversible en $\mathbb{R}^d : x^i \rightarrow y^i$ (pour $i = 1, \dots, d$) induit

$$\delta^{(d)}(y - y') = \frac{1}{|\det J|} \delta^{(d)}(x - x'), \quad \text{avec} \quad J^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

I.A Montrer que la distribution

$$D(\overrightarrow{\Lambda \cdot k}, \overrightarrow{\Lambda \cdot k'}) = (\Lambda \cdot k)^0 \delta^{(3)}(\overrightarrow{\Lambda \cdot k} - \overrightarrow{\Lambda \cdot k'}),$$

est singulière aux mêmes points que la distribution $D(\vec{k}, \vec{k}')$, c.à.d. lorsque $\vec{k} = \vec{k}'$.

I.B On introduit la matrice J de taille 3×3 dont les éléments de matrice sont donnés par

$$J^i_j = \frac{\partial(\Lambda \cdot k)^i}{\partial k^j},$$

et l'on note $\Delta(\vec{k}) = \det(J)$. Montrer que l'on a

$$D(\overrightarrow{\Lambda \cdot k}, \overrightarrow{\Lambda \cdot k'}) = \frac{(\Lambda \cdot k)^0}{|\Delta(\vec{k})|} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}').$$

I.C Pour calculer $\Delta(\vec{k})$, montrer successivement les équations suivantes

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{k}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k^1}{k^0} & -\frac{k^2}{k^0} & -\frac{k^3}{k^0} \\ 0 & \Lambda^1_0 \frac{k^1}{k^0} + \Lambda^1_1 & \Lambda^1_0 \frac{k^2}{k^0} + \Lambda^1_2 & \Lambda^1_0 \frac{k^3}{k^0} + \Lambda^1_3 \\ 0 & \Lambda^2_0 \frac{k^1}{k^0} + \Lambda^2_1 & \Lambda^2_0 \frac{k^2}{k^0} + \Lambda^2_2 & \Lambda^2_0 \frac{k^3}{k^0} + \Lambda^2_3 \\ 0 & \Lambda^3_0 \frac{k^1}{k^0} + \Lambda^3_1 & \Lambda^3_0 \frac{k^2}{k^0} + \Lambda^3_2 & \Lambda^3_0 \frac{k^3}{k^0} + \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k^1}{k^0} & -\frac{k^2}{k^0} & -\frac{k^3}{k^0} \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{k^0} k_P^T \cdot \Lambda^{-1} \\ \vec{0} & \mathbb{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \cdot \Lambda \right), \end{aligned}$$

avec $k_P^T = (k^0, -k^1, -k^2, -k^3)$.

I.D En déduire que

$$\Delta(\vec{k}) = \frac{(k_P^T \cdot \Lambda^{-1})_0}{k^0}.$$

Finalement, montrer que l'on a

$$(k_P^T \cdot \Lambda^{-1}) = (\Lambda \cdot k)^0,$$

et en déduire que la distribution $D(\vec{k}, \vec{k}')$ est invariante de Lorentz.

II. Champ non relativiste

À quatre dimensions d'espace-temps, on considère un champ complexe $\psi(t, \vec{x})$ (et son conjuguée $\psi^*(t, \vec{x})$) de masse m (avec $m \in \mathbb{R}_+$) dont la dynamique est déterminée par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial\psi, \partial\psi^*, \vec{x}) = i \psi^*(t, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) - \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} \psi^*(t, \vec{x})) \cdot (\vec{\nabla} \psi(t, \vec{x})).$$

où $\vec{\nabla}$ est le gradient par rapport aux 3 dimensions d'espace.

II.A Donner les équations du mouvement et interpréter le résultat.

II.B Calculer la partie imaginaire de $\mathcal{L}$. En déduire qu'on obtiendrait les mêmes équations du mouvement à partir de la densité lagrangienne réelle $\frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}^*)$.

II.C Montrer que la solution générale des équations du mouvement s'écrit sous la forme

$$\psi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} a(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - \frac{i\vec{k}^2}{2m} t}, \quad (1)$$

avec $a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$.

Indication : Considérer une transformation de Fourier de $\psi(t, \vec{x})$.

II.D Montrer que ce modèle est invariant sous les transformations de symétrie

$$\psi(t, \vec{x}) \longrightarrow e^{i\alpha} \psi(t, \vec{x}), \quad \text{et} \quad \psi^*(t, \vec{x}) \longrightarrow e^{-i\alpha} \psi^*(t, \vec{x}), \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

où α est une constante indépendante de $(t, \vec{x})$. Calculer le courant de Noether associé à cette symétrie et interpréter le résultat. Vérifier explicitement que le courant est conservé.

II.E Espace des phases :

- a) Montrer explicitement que $\psi(t, \vec{x})$ et $\Pi(t, \vec{x}) = i\psi^*(t, \vec{x})$ sont des variables canoniquement conjuguées. On admettra que $\psi(t, \vec{x})$ et $\Pi(t, \vec{x})$ à temps fixé et pour tout $\vec{x}$, forment un système de coordonnées de l'espace des phases. Comme à un facteur i près, ψ et ψ^* sont des variables canoniquement conjuguées l'une de l'autre, il n'y a pas lieu d'introduire une variable conjuguée pour ψ^* . Le seul crochet de Poisson non nul s'écrit alors

$$\{\psi(t, \vec{x}), \psi^*(t, \vec{y})\} = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

- b) On peut aussi utiliser comme coordonnées de l'espace des phases la fonction complexe $a(\vec{k})$ introduit en (1) (et sa complexe conjuguée). Montrer que l'on a le crochet de Poisson

$$\{a(\vec{k}), a^*(\vec{k}')\} = -i\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}').$$

- c) Donner l'expression du hamiltonien, en terme des (ψ, ψ^*) et (a, a^*) .