

TD Quantification des Champs Libres

— N° 4 —

Répétition des concepts du cours

On considère un système de mécanique analytique dont la dynamique est décrite par le lagrangien $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ qui dépend des coordonnées généralisées $q_{i=1,\dots,n}(t)$ et des vitesses généralisées $\dot{q}_{i=1,\dots,n}(t)$ (mais qui ne dépend pas explicitement du temps t).

- (i) Rappelez les équations du mouvement (équations d'Euler Lagrange).
- (ii) Définissez les moments conjugués $p_{i=1,\dots,n}$ et rappelez l'hamiltonien du système.
- (iii) Dérivez les équations de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

- (iv) Rappelez la définition des crochets de Poisson .

I. Changement de référentiel galiléen

On considère une particule libre non relativiste de masse m en 3 dimensions, dont la fonction d'onde satisfait l'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2m} \Delta \psi(\vec{x}, t),$$

(on rappelle qu'on utilise des unités avec $\hbar = 1 = c$). On considère un changement de référentiel galiléen de vitesse $\vec{v}$. On donne les lois de transformation des coordonnées et de la fonction d'onde

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t, \quad \psi'(\vec{x}', t') = e^{i(\frac{1}{2}m\vec{v}^2t - m\vec{v}\cdot\vec{x})} \psi(\vec{x}, t).$$

1) Montrer que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}, \quad \vec{\nabla}' = \vec{\nabla}, \quad \text{avec } (\vec{\nabla}')_i = \frac{\partial}{\partial x'^i}.$$

2) Montrer que $\psi'(\vec{x}', t')$ est aussi solution de l'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t'} \psi'(\vec{x}', t') = -\frac{1}{2m} \Delta' \psi'(\vec{x}', t'), \quad \text{avec } \Delta' = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x'^i} = \vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}'.$$

II. Oscillateurs complexes

On considère un ensemble de N oscillateurs complexes (Q_i, Q_i^*) dont la dynamique est déterminée par le Lagrangien

$$\mathcal{L}(Q_i, Q_i^*, \dot{Q}_i, \dot{Q}_i^*) = \sum_{i=1}^N \left(\dot{Q}_i^* \dot{Q}_i - \omega_i^2 Q_i^* Q_i \right), \quad \text{avec } \omega_i \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

- 1) Montrer qu'une solution quelconque des équations du mouvement peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}} (a_i e^{-i\omega_i t} + b_i^* e^{i\omega_i t}), \\ Q_i^*(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}} (b_i e^{-i\omega_i t} + a_i^* e^{i\omega_i t}), \end{aligned} \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

- 2) On note (Π_i, Π_i^*) les variables canoniquement conjuguées respectives de (Q_i, Q_i^*)

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}, \quad \text{et} \quad \Pi_i^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i^*}, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Donner l'expression du Hamiltonien en fonction des variables $(Q_i, Q_i^*, \Pi_i, \Pi_i^*)$ de l'espace de phases. Pour une solution (1) des équations du mouvement, écrire l'expression de $(\Pi_i(t), \Pi_i^*(t))$.

- 3) Pour une solution (1) des équations du mouvement, exprimer le Hamiltonien en fonction des variables complexes (a_i, b_i) et de leurs complexes conjuguées.
- 4) Pour une solution (1) des équations du mouvement, exprimer les variables complexes (a_i, b_i) (et leurs complexes conjuguées) en fonction de (Q_i, Π_i) (et des complexes conjuguées).
- 5) À partir des expressions trouvées dans la question précédente, montrer que les variables complexes (a_i, b_i) et leurs complexes conjuguées satisfont les crochets de Poisson

$$\{a_i, a_j^*\} = -i\delta_{ij}, \quad \{b_i, b_j^*\} = -i\delta_{ij}, \quad \{a_i, b_j\} = \{a_i, b_j^*\} = 0.$$

- 6) À partir des expressions de la question précédente, calculer le crochet de Poisson

$$\Delta_{ij}(t, t') = \{Q_i(t), Q_j^*(t')\}.$$

Vérifier que la fonction $\Delta_{ij}(t, t')$ satisfait l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_i^2 \right) \Delta_{ij}(t, t') = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

et les conditions aux limites

$$\Delta_{ij}(t, t')|_{t=t'} = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{ij}(t, t') \right) \Big|_{t=t'} = -\delta_{ij}.$$

7) On considère la distribution

$$G_{ij}(t, t') = \theta(t - t') \Delta_{ij}(t, t') .$$

Montrer successivement les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G_{ij}(t, t') &= -\delta_{ij} \theta(t - t') \cos(\omega_i(t - t')) , \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_i^2 \right) G_{ij}(t, t') &= -\delta(t - t') \delta_{ij} . \end{aligned}$$

8) Montrer que le modèle étudié dans cet exercice est invariant sous les transformations de phase

$$Q_i \longrightarrow e^{i\alpha} Q_i , \quad \text{et} \quad Q_i^* \longrightarrow e^{-i\alpha} Q_i^* , \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R} . \quad (2)$$

9) Pour une solution (1) des équations du mouvement, comment se transforment les coefficients (a_i, b_i) sous les transformations (2) ?

10) Quelle est la variation des (Q_i, Q_i^*) sous une transformation de phase infinitésimale ? Montrer que la charge de Noether associée à la symétrie (2) s'écrit comme

$$\mathcal{Q} = i \sum_{i=1}^N \left(Q_i^* \dot{Q}_i - \dot{Q}_i^* Q_i \right) .$$

Donner l'expression de $\mathcal{Q}$ comme fonction dans l'espace des phases, d'abord en termes des coordonnées $(Q_i, Q_i^*, \Pi_i, \Pi_i^*)$, puis en termes des coordonnées (a_i, a_i^*, b_i, b_i^*) .

11) Montrer que la variation infinitésimale des (Q_i, Q_i^*) peut s'écrire

$$\delta Q_i = \{ \alpha \mathcal{Q}, Q_i \} , \quad \delta Q_i^* = \{ \alpha \mathcal{Q}, Q_i^* \} .$$

12) On définit l'opération de 'conjugaison de charge' C agissant sur une fonction quelconque F sur l'espace des phases par

$$C : \quad F \longrightarrow F^C , \quad \text{avec} \quad F^C(Q_i, Q_i^*, \Pi_i, \Pi_i^*) = F(Q_i^*, Q_i, \Pi_i^*, \Pi_i) .$$

a) Montrer que C est une transformation canonique.

b) Calculer $\mathcal{H}^C$ et $\mathcal{Q}^C$.

c) Quelle est l'action de la conjugaison de charge sur les variables (a_i, b_i) ?