

TD Quantification des Champs Libres

— N° 3 —

Répétition des concepts du cours

Rappeler la forme d'une transformation de Lorentz en 4 dimensions qui correspond à (i) un boost de la vitesse β le long de la direction $(0, 1, 0, 0)$; (ii) une rotation par l'angle θ autour de l'axe $(0, 0, 0, 1)$.

I. Rotation de Wigner

On considère la rotation de Wigner $W(\Lambda, \wp)$ pour un choix particulier de Λ et $\wp$. Pour simplifier le calcul on se place dans 3 dimensions d'espace-temps et on considère

$$\wp = \begin{pmatrix} E \\ p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } E^2 - p^2 = m^2,$$

où $p \in \mathbb{R}$, et $E, m \in \mathbb{R}_+$, et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & \sinh(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\alpha) & 0 & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

I.A Vérifier que Λ satisfait

$$\Lambda^T \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta, \quad \text{avec } \eta = \text{diag}(1, -1, -1).$$

Ce Λ peut être interprété comme un boost de Lorentz dans une direction spatiale. Quelle est la vitesse de ce boost ?

I.B Déterminer les boosts de Lorentz $L(\wp)$ et $L(\Lambda \cdot \wp)$ qui, à partir de $\wp_R = (m, 0, 0)^T$, conduisent à $\wp$ et à $\Lambda \cdot \wp$, respectivement.

I.C On rappelle la définition

$$W(\Lambda, p) = L(\Lambda \cdot p)^{-1} \Lambda L(p).$$

[C1] Calculer la deuxième ligne $(W(\Lambda, p)_0^1, W(\Lambda, p)_1^1, W(\Lambda, p)_2^1)$ de la matrice $W(\Lambda, p)$, et vérifier que $W(\Lambda, p)_0^1 = 0$.

[C2] Exprimer $W(\Lambda, p)_1^1$ comme fonction de (E, m, α) et calculer sa variation lorsque E varie de m à l'infini.

[C3] Vérifier que $(W(\Lambda, p)_1^1)^2 + (W(\Lambda, p)_2^1)^2 = 1$.

[C4] Ces résultats sont-ils compatibles avec le fait que $W(\Lambda, p)$ est une rotation ? Si oui, quelle est l'angle de la rotation ?

II. Groupe de Rotation et Charges Conservées

On considère une particule non relativiste de masse $m > 0$ dans 3 dimensions, dont la dynamique est décrite par le lagrangien

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}^2), \quad (1)$$

avec un potentiel V qui ne depend que de $\vec{x}^2$. Soit R une rotation indépendante du temps t et soit $\vec{x}_R = R \cdot \vec{x}$.

II.A Montrer que les rotations sont des symétries de ce modèle, c.à.d. $\mathcal{L}(\vec{x}_R, \dot{\vec{x}}_R) = \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$.

II.B Soit $\delta\vec{x}$ une variation infinitésimale (arbitraire) de $\vec{x}$. Montrer que la variation

$$\delta\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \mathcal{L}(\vec{x} + \delta\vec{x}, \dot{\vec{x}} + \delta\dot{\vec{x}}) - \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}),$$

s'écrit comme

$$\delta\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_{i=1}^3 \delta x^i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) + \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 \delta x^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right).$$

II.C On considère une rotation R infinitésimale (proche de l'identité) :

$$\delta\vec{x} = \vec{x}_R - \vec{x} = \vec{\zeta} \wedge \vec{x},$$

ou pour les composantes $(\delta\vec{x})^i$

$$\delta x^i = x_R^i - x^i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \zeta^j x^k, \quad (2)$$

où $\vec{\zeta}$ (independent du temps) est un paramètre infinitésimal. Montrer que $\vec{L} = \vec{x} \wedge (m\dot{\vec{x}}) = \vec{x} \wedge \vec{p}$ est conservé le long de la trajectoire de la particule.

II.D Une autre façon de trouver les charges conservées est de considérer une rotation infinitésimale dependant du temps $\vec{\zeta}(t)$, qui est zéro pour le temps initial t_i et final t_f . Montrer que sous une telle transformation, la variation

$$\delta S(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} dt \delta\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}),$$

s'écrit comme

$$\delta S(t_i, t_f) = - \int_{t_i}^{t_f} dt \vec{\zeta}(t) \cdot \vec{L}(t).$$

En déduire que $\vec{L}$ est conservé le long du trajet de la particule.

II.E Les coordonnées x^i et les impulsions p^i satisfont les crochets de Poisson $\{x^i, p^j\} = \delta_{ij}$. Montrer que la variation des coordonnées sous une transformation infinitésimale de rotation (independant du temps, (2)) s'écrit

$$\delta x^i = -\{\vec{\zeta} \cdot \vec{L}, x^i\}.$$

II.F Montrer que les composantes de $\vec{L}$ satisfont les crochets de Poisson

$$\{L^i, L^j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L^k.$$