

TD Quantification des Champs Libres

— N° 2 —

Répétition des concepts du cours

- 1) Soit $\mathcal{T}_{\Lambda,a}$ un element du groupe de Poincaré, qui permet le développement au premier ordre

$$\mathcal{T}_{\Lambda,a} = \mathbb{1} + i \left(-a^\mu P_\mu + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \right), \quad \text{avec } \mathbb{1} = \mathcal{T}_{\mathbb{1}_4 \times 4, 0}.$$

Déterminer l'algèbre des générateurs.

- 2) On rappelle le vecteur de Pauli-Lubanski $W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} M^{\nu\rho} P^\tau$. En utilisant l'algèbre de Poincaré, calculer

$$[W_\mu, P_\nu], \quad [W_\mu, M_{\rho\sigma}],$$

et vérifier que $W^2 = W_\mu W^\mu$ est un opérateur de Casimir du groupe de Poincaré.

- 3) Tracer les branches des hyperboles de type $M^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2$ et rappeler que deux points sont reliés par transformations de Lorentz (en 2 dimensions).

I. Morphisme entre $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ et le groupe de Lorentz

Une base de l'espace vectoriel des matrices hermitiques 2×2 est donnée par les matrices

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)^T \in \mathbb{R}^4$. On lui associe la matrice hermitique

$$m(a) = \eta_{\mu\nu} a^\mu \sigma^\nu = a^\mu \sigma_\mu = a^0 \mathbb{1}_{2 \times 2} - \vec{a} \cdot \vec{\sigma}.$$

- 1) On rappelle que les matrices de Pauli satisfont les identités

$$\begin{aligned} \{\sigma^i, \sigma^j\} &= \sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2 \delta^{ij} \mathbb{1}_{2 \times 2}, & \forall i, j = 1, 2, 3, \\ -(\sigma^i)^T &= \epsilon \cdot \sigma^i \cdot \epsilon^{-1}, & \text{avec } \epsilon = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On définit

$$\tilde{m}(a) = \epsilon \cdot (m(a))^T \cdot \epsilon^{-1}.$$

Montrer que l'on a

$$\tilde{m}(a) = a^0 \mathbb{1}_{2 \times 2} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \quad \text{et} \quad \tilde{m}(a) \cdot m(a) = a^\mu a_\mu \mathbb{1}_{2 \times 2}.$$

2) Soit

$$M_{n \times n}(\mathbb{C}) = \{\text{matrices inversibles } n \times n \text{ avec coeffs. dans } \mathbb{C}\},$$

on définit

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) | \det A = 1\}.$$

Donc $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est le groupe des matrices complexes 2×2 de déterminant 1 (avec comme loi de composition le produit des matrices). Soit $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, montrer que

$$g^{-1} = \epsilon \cdot g^T \cdot \epsilon^{-1}.$$

3) Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ agit sur les matrices hermitiques 2×2 par

$$g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) : \quad m(a) \longrightarrow m(a_g) = g \cdot m(a) \cdot g^\dagger.$$

a) Vérifier que l'on a $\tilde{m}(a_g) = (g^\dagger)^{-1} \cdot \tilde{m}(a) \cdot g^{-1}$.

b) En déduire que la transformation qui fait passer de a à a_g conserve le carré lorentzien

$$(a_g)^\mu (a_g)_\mu = a^\mu a_\mu.$$

c) Le résultat précédent a pour conséquence que le quadrivecteur a_g est relié au quadrivecteur a par une transformation de Lorentz qu'on notera $\Lambda(g)$. On admettra que ce dernier appartient à $\mathrm{SO}^\uparrow(1, 3)$, c.à.d. $\det(\Lambda(g)) = 1$ et $\Lambda(g)^0_0 \geq 1$. On a donc construit une application

$$\begin{aligned} \Lambda : \quad \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{SO}^\uparrow(1, 3) \\ g &\longmapsto \Lambda(g). \end{aligned}$$

Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupe, c.à.d. qu'il respecte le produit

$$\Lambda(g_1 * g_2) = \Lambda(g_1) \cdot \Lambda(g_2),$$

ou $*$ est le produit de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ et $\cdot$ est le produit matriciel.

4) Soit $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Vérifier d'abord que $\Lambda(-g) = \Lambda(g)$. En déduire que l'application $g \rightarrow \Lambda(g)$ n'est pas une bijection de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ dans $\mathrm{SO}^\uparrow(1, 3)$.

5) On se restreint dans cette question à des transformations qui appartiennent au sous-groupe $\mathrm{SU}(2)$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, c.à.d. que l'on considère des matrices g qui sont de déterminant +1, mais sont aussi unitaires $g^\dagger = g^{-1}$. Montrer que l'on a dans ce cas $a_g^0 = a^0$. Quel est le sous-groupe du groupe de Lorentz auquel appartient $\Lambda(g)$?

6) On considère la transformation de $\mathrm{SU}(2)$

$$g_\alpha = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$\Lambda(g_\alpha) = \Lambda_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7) La transformation Λ_α est une rotation d'un angle α autour de l'axe 3, on peut donc se limiter pour les valeurs de α à l'intervalle $[0, 2\pi[$. Essayons d'inverser l'application qu'on a défini entre $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ et $\text{SO}^\uparrow(1, 3)$. On considère l'application d'une partie de $\text{SO}^\uparrow(1, 3)$ vers une partie de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ définie par $g(\Lambda_\alpha) = g_\alpha$. Montrer

a) $\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi} g(\Lambda_\alpha) = -\mathbb{1}_{2 \times 2}$.

b) $g(\Lambda_\alpha) * g(\Lambda_\beta) = \begin{cases} g(\Lambda_\alpha \cdot \Lambda_\beta) & \text{si } \alpha + \beta < 2\pi, \\ -g(\Lambda_\alpha \cdot \Lambda_\beta) & \text{si } \alpha + \beta \geq 2\pi. \end{cases}$

8) On considère les quatre matrices 4×4 appelées matrices de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

a) Vérifier qu'elles satisfont les relations d'anticommuation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_{4 \times 4},$$

qu'on appelle *l'algèbre de Clifford*.

Remarque : Il y a plusieurs façons d'écrire des matrices qui satisfont l'algèbre de Clifford. La représentation considérée ici est appelée *représentation chirale des matrices de Dirac*.

b) Montrer qu'on peut écrire une combinaison linéaire des matrices γ^μ sous la forme

$$a_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & m(a) \\ \tilde{m}(a) & 0 \end{pmatrix}.$$

c) On introduit la matrice diagonale par bloc

$$S(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & (g^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad g \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Montrer que l'on a

$$S(g_1 * g_2) = S(g_1) \cdot S(g_2), \quad \text{et} \quad \gamma^0 \cdot (S(g))^\dagger \cdot \gamma^0 = S(g)^{-1}.$$

d) Enfin, vérifier la relation

$$S(g) \cdot a_\mu \gamma^\mu \cdot S(g)^{-1} = (a_g)_\mu \gamma^\mu,$$

que l'on peut encore écrire

$$S(g) \cdot \gamma^\mu \cdot S(g)^{-1} = (\Lambda(g)^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$