

TD Quantification des Champs Libres

— N° 1 —

Répétition des concepts du cours

- 1) Soit φ_r (avec $r = 1, \dots, n$) une collection de n champs classiques avec la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\varphi_r, \partial_\mu \varphi_r)$. Montrer les équations d'Euler Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_r)} \right) = 0, \quad \forall r = 1, \dots, n.$$

- 2) On rappelle la presentation concrete des générateurs de translation et de transformations de Lorentz

$$P_\mu = -i\partial_\mu, \quad M_{\mu\nu} = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu).$$

Verifier qu'elles satisfont l'algèbre de Poincaré.

I. Fonctionnelles

Soit $\phi(x)$ un champ réel dépendant de $x \in \mathbb{R}^d$ (avec composants réels $x^{i=1,\dots,d}$) et $\Gamma[\phi]$ une fonctionnelle quelconque du champ. La dérivée fonctionnelle de Γ par rapport à $\phi(x)$ est obtenue en considérant une variation $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ à support compact, et en écrivant la variation de la fonctionnelle sous la forme

$$\Gamma[\phi + \delta\phi] - \Gamma[\phi] = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \delta\phi(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x)} + \mathcal{O}(\delta\phi^2).$$

Calculer la dérivée fonctionnelle $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x)}$ pour les fonctionnelles suivantes

- 1) $\Gamma[\phi] = \int d^d x \frac{1}{2} (\phi(x))^2$
- 2) $\Gamma[\phi] = \int d^d x \frac{1}{2} \eta^{ij} (\partial_i \phi(x)) (\partial_j \phi(x))$ avec $\eta^{ij} = \eta^{ji}$ (indépendant de ϕ) et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$
- 3) $\Gamma[\phi] = \phi(z)$ avec $z \in \mathbb{R}^d$ fix.
- 4) $\Gamma[\phi] = \int d^d x \int d^d y \frac{1}{2} \phi(x) G(x, y) \phi(y)$ avec $G(x, y) = G(y, x)$ une fonction $G : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (indépendant de ϕ).

II. Oscillateurs

On considère un système quantique avec des opérateurs q_i et p_i (pour $i = 1, \dots, n$) sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le théorème de Stone-von Neumann assure que pour n fini, il n'y a qu'une seule représentation irréductible des relations de commutation canoniques $[q_i, p_j] = i\delta_{ij} \mathbb{1}$ avec $\mathbb{1}$ l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$. Un autre point de vue est que si on trouve un autre ensemble d'opérateurs Q_i et P_i , qui satisfont les mêmes relations de commutation $[Q_i, P_j] = i\delta_{ij} \mathbb{1}$, il existe une transformation unitaire U de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui relie (q_i, p_j) et (Q_i, P_j)

$$Q_i = U q_i U^{-1}, \quad \text{et} \quad P_i = U p_i U^{-1}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

- 1) On considère d'abord le cas $n = 1$ et on introduit les opérateurs d'annihilation et de création

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + ip_1), \quad \text{et} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - ip_1).$$

a) Montrer que $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$.

b) On définit sur ce système la transformation linéaire (pour $\theta \in \mathbb{R}$)

$$a(\theta) = \cosh(\theta) a + \sinh(\theta) a^\dagger, \quad \text{et} \quad a^\dagger(\theta) = \sinh(\theta) a + \cosh(\theta) a^\dagger. \quad (1)$$

Quelle est l'algèbre des opérateurs $a(\theta)$ et $a^\dagger(\theta)$?

c) On définit la transformation $U(\theta) = \exp\left(\frac{\theta}{2}(a^2 - (a^\dagger)^2)\right)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer que $U(\theta)$ est une transformation unitaire.

d) Soit $b(\theta) = U(\theta) a U^{-1}(\theta)$, et $b^\dagger(\theta) = U(\theta) a^\dagger U^{-1}(\theta)$. Montrer que les opérateurs $b(\theta)$ et $b^\dagger(\theta)$ satisfont les équations différentielles

$$\frac{d}{d\theta} b(\theta) = b^\dagger(\theta), \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\theta} b^\dagger(\theta) = b(\theta).$$

En intégrant ces équations, montrer que la transformation unitaire $U(\theta)$ réalise la transformation (1), c.à.d.

$$a(\theta) = U(\theta) a U^{-1}(\theta), \quad \text{et} \quad a^\dagger(\theta) = U(\theta) a^\dagger U^{-1}(\theta).$$

- 2) On note $|0\rangle$ le vide des opérateurs $(a, a^\dagger)$ (c.à.d. $a|0\rangle = 0$) et $|\theta\rangle = U(\theta)|0\rangle$. On cherche à calculer $\langle 0|\theta\rangle$.

a) Montrer que $|\theta\rangle$ est le vide des opérateurs $(a(\theta), a^\dagger(\theta))$.

b) Montrer l'équation différentielle $\frac{d}{d\theta} \langle 0|\theta\rangle = -\frac{1}{2} \langle 0|U(\theta) (a^\dagger)^2|0\rangle = \frac{1}{2} \langle 0|a^2 U(\theta)|0\rangle$.

c) En utilisant le résultat précédent montrer que $\frac{d}{d\theta} \langle 0|\theta\rangle = -\frac{1}{2} \frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)} \langle 0|\theta\rangle$.

d) En déduire $\langle 0|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(\theta)}}$.

- 3) On considère ensuite un ensemble de N oscillateurs $(a_i, a_i^\dagger)$. On rappelle que l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^N$ est le produit tensoriel des N espaces de Hilbert associés à chaque oscillateur. En particulier, le vide $|0\rangle^N$ est le produit tensoriel des N vecteurs vides associés à chaque oscillateur. On applique la même transformation (1) sur chacun des oscillateurs

$$a_i(\theta) = \cosh(\theta) a_i + \sinh(\theta) a_i^\dagger, \quad \text{et} \quad a_i^\dagger(\theta) = \sinh(\theta) a_i + \cosh(\theta) a_i^\dagger,$$

et on note $|\theta\rangle^N$ le vide des N oscillateurs $(a_i(\theta), a_i^\dagger(\theta))$.

a) Que vaut le produit scalaire ${}^N\langle 0|\theta\rangle^N$? Que vaut sa limite lorsque $N \rightarrow \infty$?

b) Toujours dans la limite $N \rightarrow \infty$, soit $|\psi\rangle^\infty$ un état dont le nombre d'occupation, c.à.d. la valeur propre de l'opérateur $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^\infty a_i^\dagger a_i$, est fini. Que vaut le produit scalaire ${}^\infty\langle \psi|\theta\rangle^\infty$? Interpréter le résultat.