TD Quantification des Champs Libres — N° 11 —

Répétition des concepts du cours

Rappelons $S^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, où γ^μ sont les 4×4 Gamma-matrices qui satisfont la relation de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\,\mathbb{1}_{4\times4}$. Montrer que $S^{\mu\nu}$ satisfait les mêmes relations de commutation que l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz.

I. Anticommutateurs à temps quelconques

On rappelle que le développement de l'opérateur spineur de Dirac sur les solutions de l'équation de Dirac s'écrit

$$\psi_\alpha(x) = 2m \int \widetilde{d^3p} \sum_{i=1}^{2} \left(b_i(\vec{p})\, u^i_\alpha(\vec{p})\, e^{-ipx} + d^\dagger_i(\vec{p})\, v^i_\alpha(\vec{p})\, e^{ipx} \right) \Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,, \quad \text{avec} \quad \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}\,,$$

et que les opérateurs de création et d'annihilation satisfont les relations d'anticommutation

$$\left\{ b_i(\vec{p}), b^\dagger_j(\vec{p}\,') \right\} = \left\{ d_i(\vec{p}), d^\dagger_j(\vec{p}\,') \right\} = \frac{\omega_{\vec{p}}}{m}\,(2\pi)^3\, \delta_{ij}\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')\, \mathbb{1}\,.$$

On admettra de plus que l'on peut construire les opérateurs de projection

$$\sum_{i=1}^{2} u^i_\alpha(\vec{p})\, \bar{u}^i_\beta(\vec{p}) = \frac{1}{2m}\,(\not{p} + m\,\mathbb{1}_{4\times4})_{\alpha\beta}\,, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{2} v^i_\alpha(\vec{p})\, \bar{v}^i_\beta(\vec{p}) = \frac{1}{2m}\,(\not{p} - m\,\mathbb{1}_{4\times4})_{\alpha\beta}\,.$$

I.A Calculer l'anticommutateur à temps quelconques

$$\Delta_{\alpha\beta}(x,y) = \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\}\,.$$

I.B Calculer l'action de l'opérateur de Dirac sur l'anticommutateur à temps quelconques

$$\left(i\gamma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\,\delta_{\alpha\beta} \right) \Delta_{\beta\gamma}(x,y)\,.$$

I.C Que vaut $\Delta_{\alpha\beta}(x,y)\big|_{x^0=y^0}$?

I.D Soit Λ la matrice d'une transformation de Lorentz. Montrer que l'on a

$$\Delta_{\alpha\beta}(\Lambda\cdot x, \Lambda\cdot y) = S(\Lambda)_{\alpha\gamma}\, \Delta_{\gamma\delta}(x,y)\, S(\Lambda)^{-1}_{\delta\beta}\,.$$

I.E Calculer $\Delta_{\alpha\beta}(x,y)$ si les deux points sont séparés par un intervalle de genre espace, c.à.d. $(x-y)^2 < 0$.

II. Conjugaison de Charge

La matrice de conjugaison de charge dans l'espace des spineurs satisfait

$$C\,\gamma^\mu\,C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T\,, \quad \text{et} \;\; C^T = C^{-1} = C^\dagger = -C\,.$$

II.A Montrer que l'on a

$$C\,S^{\mu\nu}\,C^{-1} = -(S^{\mu\nu})^T\,, \quad \text{pour} \;\; S^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,.$$

En déduire que, pour une transformation infinitésimale

$$C \cdot S(\Lambda) \cdot C^{-1} = (S(\Lambda)^{-1})^T\,.$$

On admettra que cette relation reste vraie pour une transformation finie.

II.B Soit χ un spineur à quatre composantes, et $\bar{\chi} = \chi^\dagger \cdot \gamma^0$. On définit la transformation de conjugaison de charge dans l'espace des spineurs par

$$\chi^C = C \cdot (\bar{\chi})^T\,.$$

Montrer que l'on a

$$\begin{aligned}
(\overline{\gamma^\mu \cdot \chi})^T &= (\gamma^\mu)^T \cdot \bar{\chi}^T\,, && \text{qu'implique} && (\gamma^\mu \cdot \chi)^C = -\gamma^\mu \cdot \chi^C\,, && (1)\\
(\overline{S(\Lambda) \cdot \chi})^T &= (S(\Lambda)^{-1})^T \cdot (\bar{\chi})^T\,, && \text{qu'implique} && (S(\Lambda) \cdot \chi)^C = S(\Lambda) \cdot \chi^C\,, && (2)\\
(\overline{\chi^C})^T &= C^T \cdot \chi\,, && \text{qu'implique} && (\chi^C)^C = \chi\,. && (3)
\end{aligned}$$

II.C Déduire de (1) que si $\psi(x)$ est solution de l'équation de Dirac, alors son conjugué de charge $\psi^C(x)$ est lui aussi solution de l'équation de Dirac.

II.D On rappelle que les solutions à énergie positive et négative de l'équation de Dirac sont déterminées par les spineurs $u^i(\vec{p})$ et $v^i(\vec{p})$ (pour $i = 1, 2$), eux-mêmes reliés à leur valeur à impulsion nulle par

$$\begin{aligned}
u^i(\vec{p}) &= S(p) \cdot u^i(\vec{0})\,, && \text{avec} && p^0 = \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}\,,\\
v^i(\vec{p}) &= S(p) \cdot v^i(\vec{0})\,, && \text{avec} && m\,S(p) \cdot \gamma^0 = \not{p} \cdot S(p)\,.
\end{aligned}$$

$S(p)$ est la matrice dans l'espace des spineurs associée au boost $L(p)$ qui fait passer de la quadri-impulsion au repos $(m, \vec{0})$ à l'impulsion p. On rappelle que les solutions à impulsion nulle sont données par

$$u^1(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \quad u^2(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}, \quad v^1(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{bmatrix}, \quad v^2(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}.$$

En utilisant l'équation (2) et la forme explicite de la matrice de conjugaison de charge, $C = i\gamma^0 \cdot \gamma^2$, déterminer les spineurs conjugués de charge $(u^i(\vec{p})^C)$ et $(v^i(\vec{p})^C)$.