

## TD4 : Principe d'indétermination, transformations canoniques

### 1 Principe d'indétermination de Heisenberg pour deux opérateurs non commutants

Soient  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  deux opérateurs hermitiens qui ne commutent pas,  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ , et soit  $|\psi\rangle$  un état arbitraire normé de l'espace d'Hilbert. On définit les opérateurs :

$$\delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\psi \quad \delta \hat{B} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle_\psi \quad (1)$$

où  $\langle \dots \rangle_\psi = \langle \psi | \dots | \psi \rangle$ .

#### 1.1

Montrer que  $(\Delta_\psi A)^2 = \langle (\delta \hat{A})^2 \rangle_\psi$ , où on a défini  $(\Delta_\psi A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle_\psi - \langle \hat{A} \rangle_\psi^2$ . Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que

$$(\Delta_\psi A)^2 (\Delta_\psi B)^2 \geq |\langle \psi | \delta \hat{A} \delta \hat{B} | \psi \rangle|^2. \quad (2)$$

#### 1.2

En introduisant l'anticommutateur  $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ , montrer que

$$\delta \hat{A} \delta \hat{B} = \frac{1}{2} ([\delta \hat{A}, \delta \hat{B}] + \{\delta \hat{A}, \delta \hat{B}\}). \quad (3)$$

Justifier que  $[\delta \hat{A}, \delta \hat{B}]$  est un opérateur anti-hermitien (tel que  $\hat{C}^\dagger = -\hat{C}$ ), et  $\{\delta \hat{A}, \delta \hat{B}\}$  est un opérateur hermitien. Justifier que si  $\hat{C}$  est hermitien,  $\langle \hat{C} \rangle_\psi$  est un nombre réel, et que si  $\hat{C}$  est anti-hermitien,  $\langle \hat{C} \rangle_\psi$  est un nombre imaginaire pur.

#### 1.3

Conclure avec le principe d'indétermination d'Heisenberg-Robertson pour deux opérateurs non commutants :

$$(\Delta_\psi A)(\Delta_\psi B) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_\psi|. \quad (4)$$

### 2 Théorème de Ehrenfest et principe d'indétermination temps-énergie

Soit  $\hat{H}$  le Hamiltonien de notre système,  $\hat{A}$  un opérateur hermitien (dont la définition peut dépendre du temps), et  $|\psi(t)\rangle$  l'état évolué de notre système, qui satisfait l'équation de Schrödinger,  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ .

#### 2.1

Si on indique la moyenne sur l'état  $|\psi(t)\rangle$  comme  $\langle \dots \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | \dots | \psi(t) \rangle$ , démontrer le théorème de Ehrenfest :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{\psi(t)} = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle_{\psi(t)} + i\hbar \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle_{\psi(t)} \quad (5)$$

## 2.2

Pour la suite on imagine que la définition de  $\hat{A}$  ne dépend pas du temps. Si  $[\hat{A}, \hat{H}] \neq 0$  écrire le principe d'indétermination d'Heisenberg entre  $\hat{A}$  et  $\hat{H}$  à l'instant  $t$ . En déduire le principe d'indétermination énergie-temps :

$$(\Delta_{\psi(t)} H) \tau_{\psi}(A) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (6)$$

où

$$\tau_{\psi}(A) = (\Delta_{\psi(t)} A) \left| \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{\psi(t)} \right|^{-1}. \quad (7)$$

Justifier que le temps  $\tau_{\psi}(A)$  est le temps caractéristique dans lequel la position de la moyenne de  $A$  se décale d'un intervalle comparable à la largeur de la distribution des valeurs possibles de  $A$ .

## 2.3

Considérons un noyau instable qui se désintègre par émission d'un proton. Si le temps de désintégration est  $\tau = 1 \mu s$ , quelle est l'incertitude sur l'énergie du proton émis ?

## 3 Transformations unitaires et matrices de Pauli, portes logiques à un qubit

Dans cet exercice on va explorer les transformations unitaires les plus générales pour des spin-1/2, construites à partir des matrices de Pauli et de l'identité.

### 3.1

Montrer que les matrices de Pauli,  $\sigma^{\mu}$  ( $\mu = x, y, z$ ), sont unitaires,  $(\sigma^{\mu})^{\dagger} \sigma^{\mu} = \mathbb{I}$ .

### 3.2

L'opérateur le plus général possible qui agit sur l'espace de Hilbert d'un spin-1/2 peut-être construit (dans sa représentation matricielle) par combinaison linéaire des matrices de Pauli et de l'identité, comme

$$U = a_0 \mathbb{I} + a_x \sigma^x + a_y \sigma^y + a_z \sigma^z \quad (8)$$

où  $a_{\mu} \in \mathbb{C}$  ( $\mu = 0, x, y, z$ ). Quelles conditions générales doit-on imposer aux coefficients complexes  $a_{\mu}$  pour que  $U$  soit unitaire ?

*Suggestion* : se rappeler du résultat fondamental vu dans le TD précédent,  $\sigma^{\mu} \sigma^{\nu} = i \sum_{\gamma} \epsilon_{\mu\nu\gamma} \sigma^{\gamma} + \delta_{\mu\nu} \mathbb{I}$ .

### 3.3

On a donc la recette générale pour construire des opérateurs unitaires pour des spins-1/2. Montrer que si  $U$  est unitaire, alors aussi  $e^{i\phi} U$  est unitaire (avec  $\phi \in \mathbb{R}$ ). Justifier alors que, si  $a_0 \neq 0$ , on peut le prendre comme  $a_0 = \alpha_0 \in \mathbb{R}$  sans perte de généralité. En déduire que, suite à ce choix, on peut choisir  $a_{\mu} = i\alpha_{\mu}$  avec  $\alpha_{\mu} \in \mathbb{R}$ . Conclure sur la forme générale de  $U$  avec ce choix (en réintroduisant le facteur de phase arbitraire).

### 3.4

Si par contre  $a_0 = 0$ , quelles contraintes nous restent sur les coefficients  $a_{\mu}$  ( $\mu = x, y, z$ ) ?

---

Une classe spéciale de transformations unitaires  $U$  ce sont celles qui définissent des *portes logiques*, à savoir des opérations fondamentales à la base du calcul quantique. Une classe encore plus spéciale de portes logiques ce sont les portes logiques *de Clifford*, avec la propriété de transformer les matrices de Pauli en d'autres matrices de Pauli :

$$U^{\dagger} \sigma^{\mu} U = \pm \sigma^{\nu} \quad \mu, \nu = x, y, z. \quad (9)$$

### 3.5

Une porte logique remarquable est celle dite *de Hadamard*, qui s'écrit comme

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

L'écrire en termes de matrices de Pauli et de l'identité, et vérifier qu'elle satisfait les conditions qu'on a établi au points précédents (3.3 et 3.4). Calculer comment la porte de Hadamard agit sur les états de spin, à savoir sur  $|\uparrow_z\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $|\downarrow_z\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### 3.6

Est-ce que la porte de Hadamard est aussi une porte de Clifford ?

### 3.7

Maintenant on considère la *porte de phase*

$$U_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

En déterminer l'action sur un état générique  $\alpha|\uparrow_z\rangle + \beta|\downarrow_z\rangle$ . L'écrire en termes de matrices de Pauli et de l'identité, et vérifier qu'on est toujours bien en présence d'un opérateur unitaire.

### 3.8

Montrer que la porte de phase n'est *pas* en général une porte de Clifford, sauf cas particuliers – lesquels ?

*Remarque* : les portes de Clifford ne constituent pas un ensemble universel de portes, à savoir un ensemble de portes qui nous permette de générer n'importe quel état à un qubit/spin à partir d'un état arbitraire. Cet aspect, qui peut paraître innocent, est un élément essentiel de la complexité du calcul quantique, et de la difficulté qu'on a à reproduire le fonctionnement d'un ordinateur quantique avec un ordinateur classique !