

TD2 : Interférométrie, expérience de Stern-Gerlach, opérateurs

1 Interféromètre de Mach-Zehnder, information “which-path”

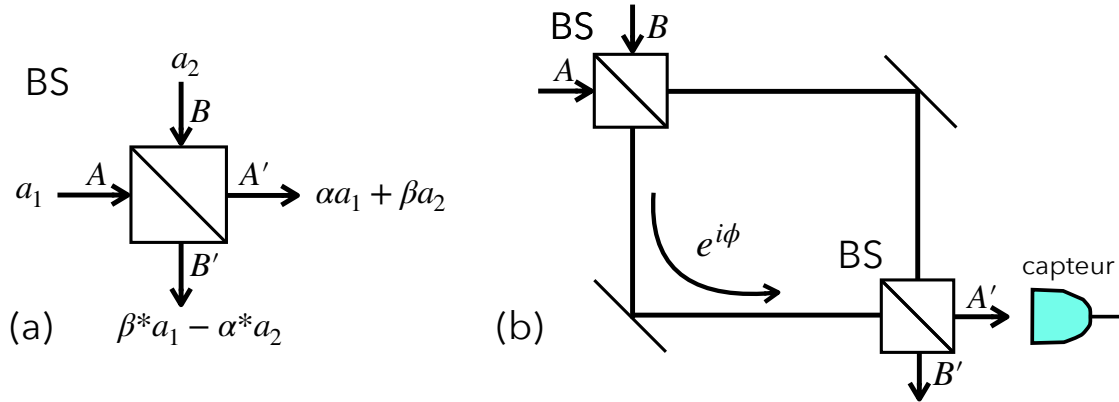


FIGURE 1 – (a) Séparateur de faisceau (BS) ; (b) interféromètre de Mach-Zehnder.

Dans cet exercice nous nous intéressons au traitement quantique des expériences d’interférométrie avec un interféromètre de Mach-Zehnder. Sa composante centrale est un séparateur de faisceau (beam splitter, BS) – représenté en Fig. 1(a). Il sépare un champ électrique d’amplitude a_1 , entrant dans sa porte d’entrée A , en deux parties, d’amplitudes αa_1 et βa_1 , sortants des portes A' et B' respectivement, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Par contre un champ électrique d’amplitude a_2 , entrant à sa porte d’entrée B , est séparé en deux parties d’amplitudes βa_2 et $-\alpha a_2$, respectivement. Si on envoie des champs sur les deux portes, ils sont donc mélangés linéairement comme indiqué dans la figure.

1.1

Soit $\alpha = |\alpha|e^{i\theta_\alpha}$ et $\beta = |\beta|e^{i\theta_\beta}$. Justifier que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Que signifient physiquement les phases $\theta_{\alpha(\beta)}$?

1.2

Imaginez maintenant d’envoyer un photon unique à une des deux portes d’entrée du BS, et qu’on mette un capteur de photons uniques à une des deux sorties (p.e. à la sortie A'). Quel est le résultat (probabiliste) de l’expérience – qu’on imagine pouvoir répéter un nombre arbitraire de fois ?

1.3

Imaginons que chacun des deux BS soit parfaitement équilibré en amplitude et phase, à savoir que $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. On imagine d’envoyer à nouveau un photon dans la porte A du premier BS. Dans l’image probabiliste de la question précédente, quel devrait être la probabilité que le photon soit capté par le capteur indiqué en figure ? (on peut ignorer le terme de phase $e^{i\phi}$ pour l’instant).

1.4

Maintenant on mène le calcul proprement, en considérant que, si on prend $a_1 = 1$, l'amplitude sortante à chaque porte de sortie correspond à l'amplitude de probabilité de détecter le photon sortant. Calculer la probabilité que le photon soit capté par le capteur dans la figure (en ignorant à nouveau le terme de phase $e^{i\phi}$), et comparer avec le résultat de la question précédente. Pourquoi est-on obligés d'imaginer que le photon ait parcouru les deux bras de l'interféromètre simultanément ?

1.5

La situation qu'on a décrit jusque là correspond à un interféromètre MZ parfaitement équilibré, à savoir les ondes qui se propagent le long de deux branches après le premier BS parcourent exactement la même distance (ou, plus précisément, le même chemin optique). Par contre, dans le cas général, il y a une différence de chemin optique entre les deux branches, qui se traduit en un phase différente qui est accumulé par les ondes dans chacune de deux branches. Soit ϕ la différence de phase entre les deux bras. Du coup une amplitude a sortante de la porte B' du premier BS arrive comme $ae^{i\phi}$ à l'entrée A du deuxième BS. Recalculer la probabilité que le photon soit capté par le capteur en figure, et montrer que cette probabilité permet de reconstruire la phase ϕ (d'ailleurs c'est justement le but de l'interféromètre).

1.6

On considère maintenant le cas plus générale de deux BS déséquilibrés, avec $\alpha = |\alpha|$ et $\beta = |\beta|e^{i\theta}$. Recalculer la probabilité de capter le photon. Quel est le facteur déterminant qui permet à cette probabilité d'être sensible à la phase ϕ ?

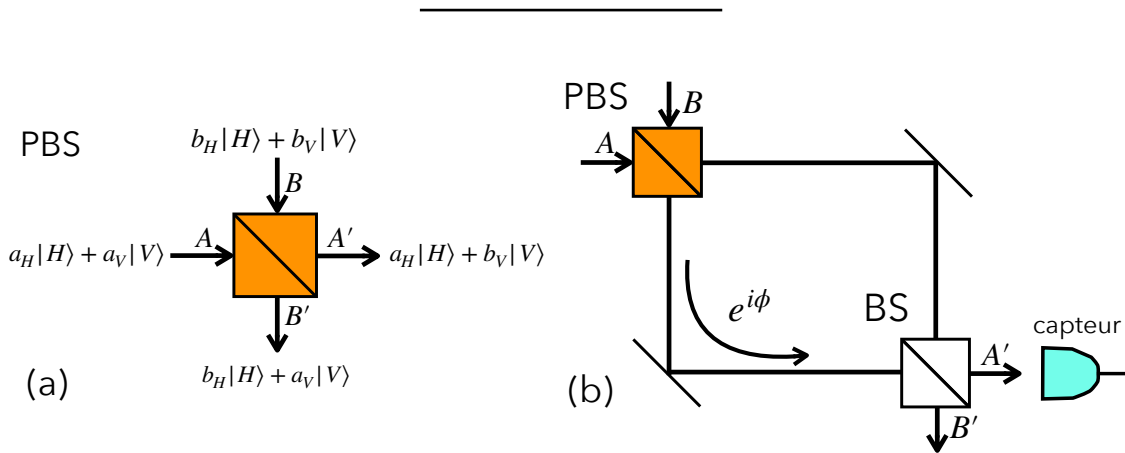


FIGURE 2 – (a) Séparateur de faisceau polariseur (PBS) ; (b) interféromètre de Mach-Zehnder modifié.

Maintenant on considère une version modifiée de l'interféromètre de MZ, contenant un séparateur de faisceau polariseur (polarizing beam splitter, PBS). Un tel objet, représenté en Fig. 2(a), laisse passer des ondes e.m. avec polarisation horizontale H , et il réfléchit des ondes e.m. avec polarisation verticale V .

1.7

On indique avec la notation $a|H\rangle + b|V\rangle$ une onde qui a une amplitude a pour sa composante de polarisation horizontale et b pour sa composante verticale. Justifier les amplitudes en sortie du PBS en fonction des amplitudes d'entrée, comme indiquées en Fig 2(a).

1.8

Comme dans la section précédente, on considère d'envoyer un photon à l'entrée A du PBS, avec une polarisation arbitraire (elliptique), à savoir avec une amplitude $a_H|H\rangle + a_V|V\rangle$, où $|a_H|^2 + |a_V|^2 = 1$. En imaginant que le BS soit parfaitement équilibré ($\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$), quelle est l'amplitude de probabilité que le photon soit capté par le capteur indiqué dans la figure ? Comparer avec le résultat au point 1.4, et justifier.

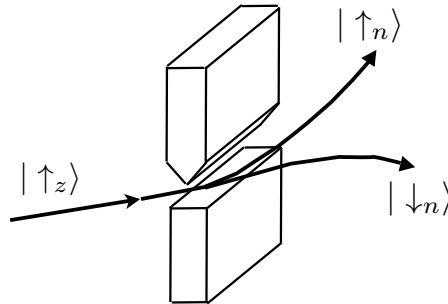
(On dit que la polarisation apporte une information sur le chemin spécifique parcouru par le photon, à savoir une information "*which-path*").

1.9

Montrer que, si on met un filtre polariseur qui sélectionne la polarisation H ou V devant le capteur, l'interféromètre cesse d'être sensible à la phase ϕ . Peut-on comprendre pourquoi ? Montrer que si on tourne le filtre polariseur pour qu'il sélectionne p.e. la polarisation diagonale $(|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$, alors la sensibilité à la phase ϕ est récupérée. Si on prend $a_H = |a_H|$ et $a_V = |a_V|e^{i\theta}$, sous quelle condition la sensibilité de l'interféromètre est optimale ?

2 Expérience de Stern-Gerlach avec orientation arbitraire du gradient de champ magnétique

On considère un faisceau d'électrons dont les spins sont tous dans l'état $|\uparrow_z\rangle$ polarisé suivant l'axe z . On fait passer ce faisceau par un appareil de Stern-Gerlach dans lequel le gradient de champ magnétique est appliqué suivant une direction arbitraire $\mathbf{n}$ ($\text{SG}_{\mathbf{n}}$).



Initialement on imagine qu'un spin polarisé suivant la direction $\mathbf{n}$ positive est dans un état $|\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle \sim \alpha|\uparrow_z\rangle + \beta|\downarrow_z\rangle$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2.1

Ecrire la forme normalisée de $|\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle$, et trouver l'état $|\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle$ qui lui est orthogonal, $\langle\downarrow_{\mathbf{n}}|\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle = 0$;

2.2

Donner la fraction $F(\uparrow_{\mathbf{n}})$ du faisceau d'électrons qui est récoltée dans l'état de spin $|\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle$ après avoir traversé l'appareil $\text{SG}_{\mathbf{n}}$.

Dans le cas le plus général possible, on exprime le vecteur $\mathbf{n}$ comme $\mathbf{n} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$, où les angles θ, ϕ sont associés à un référentiel dont l'axe z est l'axe de polarisation initiale des spins des électrons, avant de traverser l'appareil $\text{SG}_{\mathbf{n}}$.

On verra plus tard dans le cours que les états de spin polarisés le long de $\mathbf{n}$ s'écrivent comme

$$\begin{aligned} |\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle &= \cos(\theta/2) |\uparrow_z\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi} |\downarrow_z\rangle \\ |\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle &= -\sin(\theta/2)e^{-i\phi} |\uparrow_z\rangle + \cos(\theta/2) |\downarrow_z\rangle \end{aligned} \quad (1)$$

2.3

Justifier avec un argument simple pourquoi le nombre d'électrons dans chaque faisceau (avec spin $|\uparrow_n\rangle$ et $|\downarrow_n\rangle$ respectivement) qui sort du SG_n ne peut pas dépendre de l'angle ϕ . Ensuite calculer les fractions $F(\uparrow_n)$ et $F(\downarrow_n)$.

2.4

On revient à l'analogie entre états de spin et états de polarisation en choisissant $|\uparrow_n\rangle \rightarrow |H\rangle$ et $|\downarrow_n\rangle \rightarrow |V\rangle$. Donc le SG_n agit comme un séparateur-polariseur (voir problème précédent). Justifier pourquoi l'état $|\uparrow_z\rangle$ correspond à une polarisation elliptique :

$$|\uparrow_z\rangle \rightarrow \cos(\theta/2)|H\rangle - e^{i\phi} \sin(\theta/2)|V\rangle . \quad (2)$$

3 Vecteurs propres de deux matrices qui commutent

Soient A et B deux matrices hermitiques ($A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$) qui commutent entre elles, $[A, B] = AB - BA = 0$. On sait alors qu'elles admettent une base simultanée de vecteurs propres. On va explorer explicitement cette propriété.

3.1

Soit a une valeur propre de A , à laquelle correspondent n_a vecteurs propres dégénérés, $\mathbf{u}_i^{(a)}$ avec $i = 1, \dots, n_a$:

$$A\mathbf{u}_i^{(a)} = a\mathbf{u}_i^{(a)} . \quad (3)$$

Montrer que $B\mathbf{u}_i^{(a)}$ est aussi un vecteur propre de A avec la même valeur propre.

3.2

Puisque A est une matrice hermitique, ses vecteurs propres forment une base orthonormale de l'espace vectoriel sur lequel agit A . Conclure alors que

$$B\mathbf{u}_i^{(a)} = \sum_j \beta_{ij}^{(a)} \mathbf{u}_j^{(a)} . \quad (4)$$

3.3

Considérons maintenant la matrice B représentée dans la base des vecteurs propres de A , $\{\mathbf{u}_i^{(a)}\}$, la matrice $B_{ia,ja'} = (\mathbf{u}_i^{(a)})^\dagger B \mathbf{u}_{ja'}$. Montrer que, dans cette représentation, B est diagonale à blocs, un par valeur propre a , et de taille $n_a \times n_a$ (pour différents a). Montrer aussi que les éléments de matrice dans ces blocs sont les coefficients $\beta_{ij}^{(a)}$.

3.4

On imagine maintenant de diagonaliser chacun de ces blocs, tel à trouver les n_a vecteurs $\mathbf{v}_b^{(a)}$ (pour chaque bloc) avec la propriété

$$B\mathbf{v}_b^{(a)} = b\mathbf{v}_b^{(a)} \quad (5)$$

(on ne se préoccupe pas de la dégénérescence des valeurs propres b).

Conclure alors que les $\mathbf{v}_b^{(a)}$ forment la base de vecteurs propres commun de A et B qu'on cherche.

Que représentent physiquement les valeurs a et b associées au même vecteur $\mathbf{v}_b^{(a)}$?